

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

6 КЛАСС

1. В забеге участвовали 25 спортсменов. Число тех, кто финишировал раньше Пети, в три раза меньше тех, кто финишировал позже него. Какое место занял Петя?
2. Три человека собрались вместе. Каждый из них либо является рыцарем, и всегда говорит правду, либо является лжецом, и всегда говорит неправду. Первый из них сказал: "среди нас троих все лжецы". Второй с ним не согласился, сказав: "среди нас троих ровно один лжец". Можно ли на основании этой информации наверняка заключить, кем является третий: рыцарем или лжецом?
3. По окружности требуется расставить шесть попарно различных ненулевых цифр таким образом, чтобы любые три цифры, идущие по часовой стрелке подряд, давали число, кратное 7. Можно ли этого добиться?
4. Можно ли раздать шести детям 40 конфет так, чтобы у всех было разное количество конфет, и у каждого двух вместе было не более 17 конфет?
5. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5 . Можно ли разрезать его по клеточкам на три части с равными периметрами и почти равными (отличающимися не более чем на одну клеточку) площадями?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

7 КЛАСС

1. Можно ли получить число 100 из шести семёрок? Разрешается использовать скобки и знаки арифметических действий. Цифры группировать нельзя.
2. Четыре человека собрались вместе. Каждый из них либо является рыцарем, и всегда говорит правду, либо является лжецом, и всегда говорит неправду. Первый из них сказал: "среди нас ровно один лжец". Второй с ним не согласился, сказав: "среди нас ровно два лжеца". Третий промолчал, а четвёртый сообщил, что среди четверых все являются лжецами. Можно ли на основании этой информации наверняка заключить, кем является третий: рыцарем или лжецом?
3. По окружности требуется расставить шесть попарно различных ненулевых цифр таким образом, чтобы любые три цифры, идущие по часовой стрелке подряд, давали число, кратное 7. Сколькими различными способами можно этого добиться? Способы, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми.
4. На плоскости отметили несколько точек. Оказалось, что имеется ровно восемь треугольников с вершинами в отмеченных точках. Можно ли наверняка утверждать, сколько точек было отмечено?
5. Имеется 7 одинаковых с виду монет. Из них 2 фальшивых, вес которых одинаков, и он меньше веса настоящей монеты. Все настоящие монеты весят одинаково. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

8 КЛАСС

1. Дано 13 яблок. Имеются весы, позволяющие узнать суммарный вес любых двух яблок. Как за 8 взвешиваний узнать суммарный вес всех яблок?
2. Можно ли разрезать на 7 квадратов клетчатый прямоугольник размером 8×9 , проводя разрезы по сторонам клеточек?
3. За один ход разрешается либо прибавить 3 к натуральному числу, либо умножить это число на 2. За какое наименьшее число ходов можно из 1 получить 100?
4. Можно ли переставить цифры числа 123456, чтобы результат делился нацело на 11?
5. В подземном лабиринте имеется несколько комнат. Любая из них соединена не более чем с тремя другими. Также известно, что из любой комнаты в любую можно пройти или непосредственно, или через одну промежуточную комнату. Какое наибольшее число комнат может быть в таком лабиринте?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

9 КЛАСС

1. Существует ли такая фигура, что и из 16, и из 18 её экземпляров можно сложить квадрат?
2. Можно ли, используя по разу каждое из чисел от 1 до 10, расставить их в вершинах и на сторонах пятиугольника таким образом, чтобы сумма трёх чисел вдоль каждой из сторон была одинаковой?
3. За один ход разрешается либо прибавить 3 к натуральному числу, либо умножить это число на 2. За какое наименьшее число ходов можно из 1 получить 2020?
4. В треугольнике ABC угол при вершине B вдвое больше угла при вершине C . Проведена биссектриса AL , и на стороне AC выбрана точка D такая, что LA делит угол BLD пополам. Доказать, что $BL = CD$.
5. В книге встречается несколько упоминаний дат. Каждая из них записана шестью цифрами. Например, 19 сентября 2020 года записано как 19.09.20. Могло ли оказаться, что каждая цифра от 0 до 9 встретилась одинаковое число раз?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

10 КЛАСС

1. Имеется перестановка чисел от 1 до 10. Пару стоящих рядом чисел назовём *хорошей*, если одно из них нацело делится на другое. Какое максимальное число хороших пар может присутствовать в такой перестановке?
2. Все цифры четырёхзначного числа попарно различны. Среди них ровно две делятся на 2, и ровно три делятся на 3. Сколько имеется таких чисел?
3. Существуют ли два числа, сумма которых больше суммы их квадратов, но меньше суммы кубов?
4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка P , для которой $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$. Найти величину угла APB .
5. Имеется 4 числа: a_1, a_2, a_3, a_4 , каждое из которых равно нулю или единице. За один вопрос разрешается узнать, чему равна сумма нескольких из них. Можно ли, задав последовательно три вопроса, узнать значение каждого из чисел?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

11 КЛАСС

1. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что справедливо равенство $f(n) = n^3$ при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Найти $f(-1)$.
2. В шахматном турнире участвовало более двух человек. Один из них, Савелий, набрал меньше всех очков. Одного из участников, Остапа, дисквалифицировали, а все очки, набранные во встречах с ним, аннулировали, исключив этого игрока из таблицы. Мог ли в результате Савелий стать абсолютным победителем турнира, опередив всех остальных по числу очков? В шахматах за победу присуждается 1 очко, за ничью 1/2 очка, за поражение 0 очков.
3. Сколькими способами можно переставить цифры числа 12345678, чтобы результат делился нацело на 11?
4. Найти все решения уравнения

$$1 + 2^x + 3^y + 4^z = (1 + 2 + 3 + 4)^k$$

в натуральных числах.

5. В пространстве расположен треугольник ABC , длины сторон которого равны $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$, $CA = \sqrt{13}$. Можно ли так расположить его по одну сторону от некоторой плоскости α , чтобы расстояния от вершин A , B , C до этой плоскости равнялись 1, 2, 3 соответственно?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и плохо поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VI.3, VI.5, VII.1, VIII.2, IX.1, IX.2, а также X.3, хотя в последнем случае желательно описывать путь нахождения примера.

Задачи VI.1, VI.4, VIII.1, VIII.4 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

Геометрические задачи IX.4, X.4, XI.5, включая задачи на доказательство, оцениваются по тем же критериям.

В задачах на тему игр, стратегий, а также полного описания каких-либо конструкций следует обращать внимание на логическую полноту рассуждений. Сюда можно отнести задачи VI.2, VII.2, VII.5, VIII.3, IX.3, X.5, XI.2. За приведённый правильный ответ без обоснования баллы здесь не должны присуждаться.

В задаче VII.3 за построение частного примера даётся 1 балл. Если все конфигурации описаны, но без полного доказательства, то присуждается 3 балла.

В задаче VII.4 за пример конфигурации с 5 точками даётся 1 балл. Если основные случаи другого количества точек разобраны, но не до конца, то можно давать до 4 баллов.

В задаче VIII.5 за получение оценки (не более 10) даётся 3 балла, а за построение примера с 10 точками – до 4 баллов (при наличии обоснования).

В задаче IX.5 за верную идею подсчёта количества редко встречающихся цифр можно давать до 2 баллов.

В задаче X.1 за построение верного примера с 8 хорошими парами присуждается 3 балла.

В задаче X.2, при наличии верной стратегии подсчёта, основанной на разборе случаев, можно давать до 2 баллов.

В задаче XI.1 за верное составление системы даётся до 2 баллов.

В задаче XI.3 при наличии описания чисел требуемого вида можно давать до 3 баллов.

В задаче XI.4 за нахождение всех решений уравнения (без обоснования) можно давать до 2 баллов.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

6 класс (решения)

1. Ответ: 7-е место.

24 участника забега, не считая Пети, распределились в пропорции 1 : 3 (до него и после него). Поэтому до Пети прибежала четвертая часть от 24, то есть шестеро, а 18 спортсменов прибежало после него. Он сам занял седьмое место.

2. Ответ: да, можно.

Первый участник не может быть рыцарем, так как в таком случае он бы не сказал, что все собравшиеся — лжецы. Следовательно, он лжец. Тогда сообщённое им является неправдой, а потому рыцари в компании имеются. Если второй является рыцарем, то он сказал правду, и в компании ровно один лжец, каковым является первый. Значит, в этом случае третий оказывается рыцарем. Если же второй является лжецом, то и в этом случае третий должен быть рыцарем, так как лжецами являются не все трое.

Таким образом, третий участник заведомо оказывается рыцарем.

Заметим, что о принадлежности второго мы никакой информацией не располагаем: он может оказаться и рыцарем, и лжецом.

3. Ответ: да, можно.

Один из возможных примеров: 154623 (по кругу).

4. Ответ: нет, нельзя.

Пусть число конфет у детей принимает значения $a < b < c < d < e < f$. Предположим, что $e + f \leq 17$. Число c по крайней мере на 2 меньше e , и d по крайней мере на 2 меньше f . Следовательно, $c + d$ меньше $e + f$ как минимум на 4, то есть $c + d \leq 13$. Аналогично, $a + b \leq 9$. Вместе это даёт не более $9 + 13 + 17 = 39$ конфет, вопреки условию.

Заметим, что для числа 18 вместо 17 легко строится пример:

$$10 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 40.$$

5. Ответ: да, можно.

Опишем словесно один из примеров разрезания. Рисунок при этом будет симметричен относительно вертикальной прямой, разделяющей квадрат пополам.

Первая фигура состоит из первого слева столбца, и трёх клеток второго столбца: двух верхних и одной нижней. Третья фигура ей симметрична относительно вертикальной оси. Вторая фигура расположена между ними.

Периметр у каждой из фигур равен 16, а значения площадей равны 8, 9, 8.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: да, можно.

Пример решения:

$$(7 + 7) \cdot 7 + (7 + 7) : 7 = 100$$

2. Ответ: да, можно.

Четвёртый участник не мог быть рыцарем, так как в противном случае получилось бы, что он сказал неправду. Следовательно, он лжец, а рыцари среди четверых найдутся. Первый и второй сказали противоречащие друг другу вещи. Значит, они оба не могут быть рыцарями, и тогда лжецов как минимум два. Значит, первый сказал неправду, то есть он лжец. Если допустить, что лжецов ровно два, то остальные — рыцари, включая третьего. Если же лжецов более двух, то второй солгал, и тогда третий является единственным рыцарем. Тем самым, мы пришли к однозначному выводу, что третий участник — рыцарь.

Заметим, что о принадлежности второго мы информацией не располагаем: он может оказаться как рыцарем, так и лжецом.

3. Ответ: 4 способами.

Пусть трёхзначное число $x = 100a + 10b + c$ делится на 7, и число $y = 100b + 10c + d$, образованное следующей тройкой цифр, также делится на 7. Тогда $100x - y = 1000a - d = 1001a - (a + d)$, то есть $a + d$ делится на 7, так как 1001 делится.

Мы этим доказали, что противоположные цифры (расположенные через две) в сумме дают величину, кратную 7. Это значит, что напротив 1 может стоять только 6, напротив 2 только 5, а напротив 3 лишь 4. При этом напротив 5 может также стоять 9 вместо 2, и напротив 6 может быть 8 вместо 1. Цифра 7 присутствовать не может, так как нет ни нулей, ни повторений цифр.

Итого мы имеем три пары противоположных цифр: 3 и 4; 6 с 1 или 8; 5 с 2 или 9. Замена 8 на 1 или 9 на 2 на свойство расстановки не влияет, поэтому осуществим такие замены. Получатся цифры от 1 до 6. Их можно расположить лишь

одним способом. В самом деле, если после 1 идёт 2, то далее следует цифра 6, чтобы получилось трёхзначное число, кратное семи, и возникает расстановка 126. Но это не подходит, так как цифры 1 и 6 не будут расположены друг напротив друга. Если за 1 идёт 3, то кратное семи число равно 133, и цифры повторяются. После 14 могло бы идти только 0 или 7, что нас не устраивает. Поскольку 6 противоположна цифре 1, остаётся лишь вариант 15, после чего идёт цифра 4, и вариант имеет вид 154623.

Теперь мы вправе заменить цифры 1 и 2 на 8 и 9 соответственно (одну из них, или сразу обе), что приводит к четырём возможным расстановкам: кроме указанной выше, это ещё 854623, 154693, 854693.

4. Ответ: да, можно.

Можно утверждать, что точек было отмечено ровно пять. Докажем это.

Прежде всего, меньше пяти точек быть не могло, так как в этом случае можно образовать не более 6 треугольников. Пример с 5 точками легко строится (вершины квадрата и его центр).

Пусть точек 6 или более. Если есть 5 точек общего положения (то есть никакие три не лежат на одной прямой), то из них уже можно образовать 10 треугольников. Таким образом, по крайней мере три точки лежат на одной прямой. Если их ровно 3, то из них можно образовать 3 пары, и 3 способами выбрать точку вне прямой. Треугольников получается как минимум 9. Пусть 4 точки лежат на прямой, а остальные не лежат. Тогда из 4 точек можно образовать 6 пар, и к каждой из них 2 способами выбрать точку вне прямой, что даёт 12 треугольников. Наконец, если есть 5 точек на одной прямой, то из них можно образовать 10 пар, и получается 10 треугольников вместе с точкой вне этой прямой. (Если все точки лежат на одной прямой, то треугольников вообще нет.)

5. Ответ: да, можно.

Положим на каждую чашу весов по три монеты. Предположим, что чаши оказались в равновесии. Тогда на каждой из них поровну фальшивых монет, и это означает, что их ровно по одной. За одно взвешивание можно определить, какая именно монета с данной чаши фальшивая, сравнив вес любых двух монет с этой чашей (если вес одинаков, то это оставшаяся, а если нет, то более лёгкая). Итого после трёх взвешиваний мы всё узнаем.

Теперь предположим, что одна из чаш перевесила. Тогда на более тяжёлой из чаш все монеты настоящие, а на более лёгкой — одна или две фальшивые. Вторым взвешиванием сравним вес двух монет с лёгкой чаши. Если он одинаковый, то третьим взвешиванием сравним одну из этих монет с настоящей. Тогда мы или увидим, что обе они фальшивые, или это не так, и фальшивой является третья монета с данной чаши. Другая фальшивая монета — та, которая не участвовала в первом взвешивании.

Наконец, если одна из двух монет при втором взвешивании перевесила, то одну фальшивую монету мы определили. Третью монету с той же чаши далее сравниваем с настоящей. Получаем, что или она фальшивая, или второй фальшивой будет монета, не принимавшая участия в первом из взвешиваний.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

8 класс (решения)

1. За первые 3 взвешивания можно узнать числа $a + b$, $a + c$ и $b + c$, где a , b , c — веса трёх выбранных яблок. Тем самым становится известна удвоенная сумма их весов, если все найденные числа сложить. Разделив её пополам, мы узнаем сумму $a + b + c$. (Отсюда легко определить вес каждого из выбранных трёх яблок, хотя это и не требуется.) У нас останется 10 яблок, которые можно разбить на пять пар, и за 5 взвешиваний узнать суммарный вес каждой пары. Тем самым, после 8 взвешиваний мы будем знать суммарный вес всех тринадцати яблок.

2. Ответ: да, можно.

Разрежем сначала прямоугольник на части размером 8×4 и 8×5 . Первую из частей разрезаем на два квадрата со стороной 4. От второй отрезаем квадрат со стороной 5. Остается прямоугольник 3×5 , который надо разрезать на 4 квадрата.

Это сделать нетрудно: отрезаем квадрат со стороной 3, а оставшийся прямоугольник 3×2 разрезаем на квадрат со стороной 2 и два единичных квадрата.

3. Ответ: за 7 ходов.

После одного хода число не превосходит 4, после двух оно не превосходит 8, и так далее. Отсюда следует, что если число больше 2^k , то нужно как минимум k ходов, чтобы получить его из единицы.

Удобно действовать в обратном порядке, то есть переходить от 100 к 1, либо деля число на 2, либо вычитая из него 3. Здесь возможна такая последовательность из 7 ходов: $100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Покажем, что менее семи ходов недостаточно.

Если мы из чётного числа вычтем 3, то далее получится нечётное число. Если это не 1, то из него снова придётся вычесть 3. Тогда, если мы 100 не будем делить на 2, то за два хода получим $94 > 2^6$, и далее потребуется не менее 6 ходов. По этой причине первый переход должен быть от 100 к 50. Аналогично, если далее мы вычтем 3, то это придётся сделать ещё раз, и из $44 > 2^5$ нам

будет нужно не менее 5 ходов. Общее число ходов будет не менее 8. Тем самым, вынужденно имеем $100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 22$. Если из 22 мы решим вычесть 3, то далее придётся перейти к числу 16, от которого нам потребуется сделать ещё как минимум три хода. Общее число ходов снова составит как минимум 8, что нас не устраивает. Значит, далее последуют ходы $22 \rightarrow 11 \rightarrow 8$, и в конце останется сделать ещё два хода.

4. Ответ: нет, нельзя.

Пусть число после перестановки цифр стало иметь вид $\overline{abcdef}$. Согласно известному признаку делимости на 11, знакопеременная сумма $a - b + c - d + e - f$ кратна 11. Обозначим $x = a + c + e$. Тогда $b + d + f = 21 - x$, поскольку сумма всех шести цифр числа равна $1 + 2 + \dots + 6 = 21$. Тем самым, $21 - 2x$ делится на 11. Отсюда легко заключить, что x при делении на 11 даёт в остатке 5, то есть x равно 5 или 16. В обоих случаях сумма каких-то трёх цифр числа оказывается равна пяти, но это невозможно, так как наименьшее значение равно $1 + 2 + 3 = 6$.

5. Ответ: 10 комнат.

Из одной комнаты можно попасть максимум в три. Из каждой комнаты, в которую мы попали, можно перейти максимум в две новых. По условию, это число исчерпывает все комнаты. Их получается не более $1 + 3 + 6 = 10$.

Осталось построить пример лабиринта с 10 комнатами. Пусть комнаты от 1 до 5 соединены по циклу в виде пятиугольника, и то же для комнат от 6 до 10. Добавим переходы $1-6$, $2-8$, $3-10$, $4-7$, $5-9$ (это всё нетрудно изобразить на рисунке; получится так называемый *граф Петерсена*). Ввиду симметричности структуры, достаточно рассмотреть любую из комнат и проверить, что из неё можно перейти в любую другую за один или два перехода.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: да, существует.

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник. Из четырёх таких фигур складывается квадрат, а из четырёх квадратов – новый квадрат. Это требует 16 экземпляров фигуры.

Деля каждую сторону равнобедренного прямоугольного треугольника на три равные части, и проводя через точки деления прямые, параллельные сторонам, мы разрезаем один треугольник на 9 равных между собой. Действуя в обратную сторону, мы из 9 одинаковых фигур складываем одну. Две такие фигуры позволяют сложить квадрат, составленный из 18 копий исходной фигуры.

2. Ответ: да, можно.

Приведём один из возможных примеров требуемой расстановки чисел. Сопоставим вершинам числа по правилу $A \mapsto 1$, $C \mapsto 2$, $E \mapsto 3$, $B \mapsto 4$, $D \mapsto 5$, а сторонам — по правилу $DE \mapsto 6$, $CD \mapsto 7$, $BC \mapsto 8$, $AB \mapsto 9$, $EA \mapsto 10$. Тогда сумма трёх чисел вдоль каждой из сторон будет равна 14.

3. Ответ: за 13 ходов.

После одного хода число не превосходит 4, после двух оно не превосходит 8, и так далее. Отсюда следует, что если число больше 2^k , то нужно как минимум k ходов, чтобы получить его из единицы.

Удобно действовать в обратном порядке, то есть переходить от 2020 к 1, либо деля число на 2, либо вычитая из него 3. Здесь возможна такая последовательность из 13 ходов: $2020 \rightarrow 1010 \rightarrow 505 \rightarrow 502 \rightarrow 251 \rightarrow 248 \rightarrow 124 \rightarrow 62 \rightarrow 31 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Покажем, что менее 13 ходов недостаточно.

Если мы из чётного числа вычтем 3, то далее получится нечётное число. Если это не 1, то из него снова придётся вычесть 3. Предположим, что рано или поздно мы будем делить число на 2. Тогда мы два раза подряд вычитаем 3 с последующим делением пополам. Такая стратегия заведомо не оптимальна,

так как вместо этого можно было сначала разделить на 2 (заметим, что число при этом чётно), и потом один раз вычесть 3. В виде формулы: $\frac{n-3-3}{2} = \frac{n}{2} - 3$. Таким образом, если мы 2020 не будем делить на 2, то придётся ограничиться вычитаниями тройки, для чего нужно сделать сотни ходов. Поэтому первый переход $2020 \rightarrow 1010$ вынужден. Второй также вынужден, так как из 1010 вычитаниями тройки вообще не получить единицу. Далее получится 505, и ввиду нечётности мы переходим к 502. На этом пути можно проследить вынужденность предлагаемых преобразований, так как одними вычитаниями тройки или не обойтись, или это требует слишком много операций.

4. Треугольник ALB равен ALD по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $BL = LD$. Далее, угол при вершине B , который мы запишем как $\angle B$, равен углу $\angle ADL$. Последний равен сумме двух внутренних углов треугольника CLD , не смежных с ним. Отсюда $\angle B = \angle C + \angle CLD$. С учётом равенства $\angle B = 2\angle C$, имеем $\angle CLD = \angle C = \angle DCL$, то есть треугольник DCL равнобедренный, и $CD = LD = BL$.

5. Ответ: нет, не могло.

Обратим внимание на то, что первые две цифры могут принимать значения от 01 до 31, вторые две — от 01 до 12, последние две могут быть любыми.

Допустим, что все цифры встречаются одинаково часто. Легко видеть, что количество дат делится на 5. Пусть оно равно $5k$. Тогда каждая цифра встретилась ровно $3k$ раз. Общее число вхождений 0 или 1 равно $6k$.

Рассмотрим первую цифру месяца. Это 0 или 1. Таких вхождений $5k$, поэтому среди первых цифр числа (это самая первая цифра в записи даты), 0 или 1 встречается не более k раз. Остальные $4k$ (или более) первых цифр записи — это 2 или 3. Поскольку 2 на этом месте встречается не более $3k$ раз, по крайней мере k первых цифр равны 3. За ними стоять могут только 0 или 1. Таких вхождений не более k , поэтому их ровно k . Тогда в качестве самой первой цифры ни 0, ни 1 уже не встретятся, и на цифру 2 придётся $4k$ вхождений. Противоречие.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: 8 пар.

Попробуем построить перестановку, в которой все 9 пар соседних чисел являются хорошими. Забегая вперёд, скажем, что такого примера не получится, и в ходе попытки его построить возникнет пример с 8 парами (всеми, кроме одной).

Число 7 может соседствовать только с 1. Поэтому оно находится с краю. Будем считать, что слева. Число 5 может соседствовать только с 1 и 10, а число 9 — только с 1 и 3. Ясно, что только одно из чисел 5, 9 может быть рядом с 1. Тогда второе находится у правого края. В обоих случаях возникает цепочка чисел от 5 до 9 без участия 1. Ясно, что рядом с 5 находится 10, и тогда за ним идёт 2. Рядом с 9 может быть только 3, а с другой стороны от 3 только 6. Возникает такая ситуация (в том или другом направлении): 5, 10, 2, ..., 6, 3, 9. Между 2 и 6 находятся в каком-то порядке 4 и 8. Понятно, что ни одно из них не соседствует с 6. Это показывает, что все 9 пар хорошими оказаться не могут, и построен пример с 8 хорошими парами (4 и 8 ставим как угодно, а 7 и 1 у нас стоят слева).

2. Ответ: 234.

Среди трёх цифр, делящихся на 3, может быть одна или две чётных. Во втором случае это цифры 0 и 6. Третья, делящаяся на 3, может быть выбрана 2 способами (3 или 9). Оставшаяся цифра не делится ни на 2, ни на 3, то есть это 1, 5 или 7 — всего 3 способа. Итого 6 способами выбирается состав цифр. Переставить их можно $4! = 24$ способами, из которых в $3! = 6$ случаях запись начинается нулём. Значит, нам подходят $24 - 6 = 18$ перестановок, и получается $6 \cdot 18 = 108$ вариантов.

Пусть теперь цифра, делящаяся на 6, одна. Оставшиеся две цифры, кратные 3, это 3 и 9. Четвёртая цифра чётна и не делится на 3. Это 2, 4 или 8 — выбираем эту цифру тремя способами. Если цифра 0 отсутствует, то возможно 24 перестановки. Если присутствует, то 18. Итого 42, и осталось умножить на 3, получая 126.

Вместе имеем $108 + 126 = 234$.

3. Ответ: да, существуют.

Здесь достаточно указать требуемые числа, но попробуем их подобрать. Пусть $x^3 + y^3 > x + y > x^2 + y^2$. Поскольку сумма чисел положительна, первое неравенство, записанное в виде $(x + y)(x^2 - xy + y^2) > x + y$, можно сократить на $x + y$, получая $x^2 - xy + y^2 > 1$, то есть $(x + y)^2 > 1 + 3xy$. Полагая $p = x + y$, перепишем второе неравенство в виде $p > p^2 - 2xy$. Таким образом, $3p^2 - 3p < 6xy < 2p^2 - 2$ из этих двух неравенств, откуда $(p - 1)(p - 2) < 0$.

Возьмём p посередине, то есть положим $x + y = \frac{3}{2}$. Тогда окажется, что $\frac{3}{8} < xy < \frac{5}{12}$. После замены $y = \frac{3}{2} - x$ получатся два квадратных неравенства, в которых можно выделить полный квадрат, записывая их в виде $\frac{7}{48} < (x - \frac{3}{4})^2 < \frac{3}{16}$. Число x , им удовлетворяющее, нетрудно подобрать. Например, годится $x = 1, 15$. При этом $y = 0, 35$.

Можно осуществить непосредственную проверку, что указанные числа удовлетворяют условиям.

4. Ответ: 135° .

Для начала приведём вычислительное решение.

Обозначим сторону квадрата через a , а расстояния от P до сторон AB и AD через x и y соответственно. С учётом теоремы Пифагора, имеем систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (a - y)^2 = 4 \\ (a - x)^2 + (a - y)^2 = 9 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, имеем $a(a - 2y) = 3$. Вычитание второго из третьего даёт $a(a - 2x) = 5$. Отсюда $2x$ и $2y$ выражаются через a , что с учётом первого уравнения даёт $4 = (2x)^2 + (2y)^2 = (a - \frac{5}{a})^2 + (a - \frac{3}{a})^2$, что после упрощений приводит к $a^2 + \frac{17}{a^2} = 10$.

Решая квадратное уравнение относительно a^2 , получаем $a^2 = 5 \pm 2\sqrt{2}$. Заметим, что $2x = a - \frac{5}{a} > 0$, откуда $a^2 > 5$, то есть остаётся один корень $a^2 = 5 + 2\sqrt{2}$. По теореме косинусов, $\cos \angle APB = \frac{1^2 + 2^2 - a^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда угол равен 135° градусам.

Приведём второй способ решения, додуматься до которого сложнее, но он основан на дополнительных построениях, а не на вычислениях.

Будем считать, что вершины A, B, C, D идут по часовой стрелке. Повернём квадрат на 90° градусов вокруг точки B по часовой стрелке. Образы вершин A, D, P обозначим в виде тех же букв со штрихами. Получится квадрат $BAD'A'$ с точкой P' внутри него, где $P'A' = 1, P'B = 2, P'A = 3$. Треугольник PBP' — равнобедренный прямоугольный. Из него $\angle P'PB = 45^\circ$. При этом $PP' = 2\sqrt{2}$. В треугольнике $AP'P$ имеет место равенство квадрата стороны AP' сумме

квадратов двух других сторон: $3^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора (следствию теоремы косинусов), угол при вершине P является прямым. Отсюда $\angle APB = \angle APP' + \angle P'PB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

5. Ответ: да, можно.

Зададим первый вопрос про сумму $a_1 + a_2$. Если в ответе будет 0 или 2, то значения a_1 и a_2 мы знаем, и достаточно задать два вопроса: про значение a_3 и про a_4 , сложив каждое из них с уже известным числом (например, с a_1).

Пусть $a_1 + a_2 = 1$. Зададим второй вопрос про $a_1 + a_3$. Если в ответе прозвучит 0 или 2, то значения слагаемых известны, а вместе с ними известно и a_2 . Останется задать третий вопрос про a_4 , сложенное с известным числом.

Наконец, если $a_1 + a_3 = 1$, то имеет место один из двух случаев: 1) $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$; 2) $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$. Сумма $a_2 + a_3$ всегда чётна. Зададим третий вопрос про сумму $a_2 + a_3 + a_4$. По чётности ответа, мы узнаем значение a_4 , а вместе с ним и $a_2 + a_3$. Тогда, в зависимости от того, равна эта сумма 0 или 2, мы узнаем, какой из случаев 1) или 2) имеет место.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2020 – 2021 учебный год

11 класс (решения)

1. Ответ: $f(-1) = 23$.

Положим $f(x) = ax^2 + bx + c$. По условию, $f(1) = 1^3 = 1$, $f(2) = 2^3 = 8$, $f(3) = 3^3 = 27$. Из первого равенства $a + b + c = 1$. Второе и третье равенства соответственно дают $4a + 2b + c = 8$, откуда $3a + b = 7$, и $9a + 3b + c = 27$, откуда $4a + b = 13$. Следовательно, $a = 6$, и $b = -11$, $c = 6$.

Таким образом, $f(x) = 6x^2 - 11x + 6$, то есть $f(-1) = 6 + 11 + 6 = 23$.

Возможен и другой способ решения, не связанный с составлением системы. Рассмотрим многочлен $x^3 - f(x)$ степени 3. По условию, его корнями будут числа 1, 2, 3. Тогда по теореме Безу он делится на $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. С учётом того, что старший коэффициент равен единице, имеет место равенство. Отсюда $f(x) = x^3 - (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, и остаётся подставить $x = -1$ (можно даже не раскрывать скобки).

2. Ответ: нет, не мог.

Число очков, набранных Савелием, не могло увеличиться после дисквалификации Остапа. Число очков, набранных каждым из остальных участников, могло уменьшиться максимум на единицу (в случае, если он победил Остапа). Если сначала число очков Савелия было меньше, а потом стало больше, чем у каждого из остальных, то это могло произойти только в случае, когда Савелий проиграл Остапу, а остальные у него выиграли.

В этой ситуации (после дисквалификации) все участники набрали поровну очков, а Савелий на половину очка больше. Пусть участников кроме Савелия в этом случае было n . Тогда все вместе $n + 1$ участников набрали $(n + 1)n$ половин очков. Из них n участников набрали по x половин очков, а Савелий набрал $x + 1$. Это даёт уравнение $(n + 1)n = nx + x + 1$, то есть $1 = (n + 1)(n - x)$, что невозможно при $n \geq 1$.

3. Ответ: 4608.

Пусть число стало иметь вид $\overline{abcdefgh}$. Согласно известному признаку делимости на 11, знакопеременная сумма $a - b + c - d + e - f + g - h$ кратна 11. Обозначим $x = a + c + e + g$. Тогда $b + d + f + h = 36 - x$, поскольку сумма всех восьми цифр числа равна $1 + 2 + \dots + 8 = 36$. Тем самым, $2x - 36$ делится на 11. Отсюда легко заключить, что x при делении на 11 даёт в остатке 7, то есть x равно 7, 18 или 29. В первом и третьем случае, сумма каких-то четырёх цифр числа оказывается равна семи, но это невозможно, так как наименьшее значение равно $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Таким образом, $x = 18$, то есть сумма цифр на нечётных местах, а также на чётных, принимает именно это значение. В одну из четвёрок входит цифра 8, и тогда остальные три цифры в сумме дают 10. Легко выписать все возможные варианты с точностью до перестановки: 721, 631, 541, 532.

Итак, имеется 4 способа выбрать четвёрку с участием цифры 8. Эти цифры можно разместить на чётных или нечётных местах. Итого 8 вариантов для состава цифр на местах той и другой чётности. Ввиду того, что имеется $4! = 24$ способа упорядочить каждую из двух четвёрок, имеем ответ $8 \cdot 24 \cdot 24 = 4608$.

4. Ответ: уравнение имеет 4 решения в натуральных числах. Либо $k = 1$, и тогда $x = y = z = 1$, либо $k = 2$, и тройка (x, y, z) принимает одно из трёх значений: $(5, 1, 3)$, $(3, 3, 3)$ или $(1, 4, 2)$.

Для $k = 1$ имеем единственный вариант $1 + 2 + 3 + 4$, то есть $x = y = z = 1$. Пусть $k = 2$. Будем брать значения для y и подставлять, а потом смотреть на двоичное разложение числа $100 - 3^y - 1$. Вариантов при этом будет возникать или один, или ни одного.

1) $y = 1$

$$96 = 2^5 + 4^3$$

2) $y = 2$

90 не равно сумме двух степеней двойки

3) $y = 3$

$$72 = 2^3 + 4^3$$

4) $y = 4$

$$18 = 2^1 + 4^2$$

Итого получилось 4 решения. Покажем, что при $k \geq 3$ решений нет.

При делении на 8 степени тройки дают в остатке 1 или 3. Поэтому $2^x + 4^z$ даёт в остатке 4 или 6 при делении на 8. Во втором случае нет делимости на 4, откуда $x = 1$, но тогда и $z = 1$, чтобы не получилось значение 2. Значит, $3^y + 7 = 10^k$. Случай $y \geq 2$ невозможен из соображений остатка от деления на 9, а при $y = 1$ имеем ранее рассмотренный случай.

Остаётся случай, когда $2^x + 4^z$ даёт в остатке 4 при делении на 8. Такое бывает при $z = 1, x \geq 3$, или при $z \geq 2, x = 2$. Вторая возможность сводится к первой, так как при этом $2^x + 4^z = 2^{2z} + 4^1$. Итого имеем $2^x + 3^y + 5 = 10^k$. При этом y нечётно. Случай $y = 1$ быстро отбрасывается, а при $y \geq 2$ из соображений остатка от деления на 9 оказывается, что $x = 6m + 2$. Показатель чётен, то есть 2^x даёт остаток 1 или 4 при делении на 5. Однако 3 в нечётной степени даёт 2 или 3 в остатке. Тем самым, $2^x + 3^y$ не делится на 5 — противоречие.

5. Ответ: нет, нельзя.

Для начала заметим, что $\sqrt{13} + \sqrt{2} > 5$, что легко проверяется возведением в квадрат. То есть неравенство треугольника выполнено, как и должно быть.

Пусть A', B', C' — проекции точек A, B, C соответственно на плоскость α . Из прямоугольной трапеции $ABB'A'$ при помощи теоремы Пифагора получаем, что $A'B' = \sqrt{5^2 - (2-1)^2} = 2\sqrt{6}$. Из двух других прямоугольных трапеций аналогично получаем $B'C' = \sqrt{2 - (3-2)^2} = 1$ и $C'A' = \sqrt{13 - (3-1)^2} = 3$. При этом $B'C' + C'A' = 4 < 2\sqrt{6} = A'B'$, то есть неравенство треугольника не выполнено. Поэтому такой конфигурации не существует.